Máquina de Turing e o Problema da Parada

#09

Conjuntos Recursivos e Recursivamente Enumeráveis

Função característica

Definição 1: Seja $A \subseteq \mathbb{N}$. A função característica $f_A \colon \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1\}$ de A é a função dada por

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A, \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Definição 2: Um conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ é dito recursivo sse f_A é computável.

Função característica

Definição 3: Seja M um predicado sobre os naturais. A função característica $f_M: \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$ de M é a função dada por

$$f_M(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } M(x) \text{ é verdadeiro,} \\ 0, & \text{se } M(x) \text{ é falso.} \end{cases}$$

Definição 4: O predicado M é dito decidível sse f_M é computável.

Obs.: Tais definições podem ser adaptadas para subconjuntos de $\mathbb{N}^k$.

Exemplo

O conjunto P dos números primos é recursivo.

Demonstração (informal):

Seja $n \in \mathbb{N}$.

Seja $k \in \mathbb{Z}$, $k = 2$.

Para $i = 1$ até n faça o seguinte:

- Tome o resto r da divisão de n por i;
- Se $r = 0$, então subtraia uma unidade de k.

Se $k = 0$, então $f_P(n) = 1$ (n é primo);

Senão, $f_P(n) = 0$ (n não é primo).

Conjuntos Recursivamente Enumeráveis

Em alguns casos, podemos decidir apenas quando um dado elemento x pertence a algum conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ (ou de forma equivalente, quando o predicado "$x \in A$" é verdadeiro), mas não podemos decidir quando ele não pertence ao conjunto (de forma equivalente, quando o predicado "$x \in A$" é falso).

Nesse caso, dizemos que o conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ em questão é recursivamente enumerável ou, de forma equivalente, que o predicado "$x \in A$" é parcialmente decidível.

Conjuntos Recursivamente Enumeráveis

Definição 5: Seja $A \subseteq \mathbb{N}$. Dizemos que A é um conjunto recursivamente enumerável se a função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{1\}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A, \\ indefinida, & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

é computável.

Duas proposições úteis

Proposição 1: Um conjunto $D \subseteq \mathbb{N}$ é recursivamente enumerável sse existe um predicado $M(x, y)$ decidível tal que $x \in D \leftrightarrow (\exists y)M(x, y)$, em que $y \in \mathbb{N}$.

Proposição 2: Um conjunto $D \subseteq \mathbb{N}$ é recursivo sse, D e $\overline{D}$ (complemento de D) forem ambos recursivamente enumeráveis.

Exemplo

O conjunto

$$A = \{x\text{: existe uma sequência de } x \text{ consecutivos nºs 7 na expansão decimal de } \pi\}$$

é recursivamente enumerável.

Demonstração (informal): Temos que fornecer um algoritmo que lista tais números x.

Exemplo

Seja $n \in \mathbb{N}$.

Para $i = 1$ até o infinito, faça:

- Verifique se a *i*-ésima casa decimal de π é igual a 7.
- Se sim, verifique se as $(n - 1)$ próximas casas decimais de π são iguais a 7. Se forem, encerre o algoritmo ($f(n) = 1$, $n \in A$).
- Caso contrário, continue.

Questão final

Todo conjunto recursivo é recursivamente enumerável.
Afinal, se ele é recursivo, sempre sabemos quando um número pertence ou não a esse conjunto.

Mas será que todo conjunto recursivamente enumerável é recursivo?
A resposta é não!

Número Imaginário

numeroimaginario
.com
.br